Formulaire de magnétostatique et Induction

1 Champ magnétostatique

$\overrightarrow{B}$ créé par une particule en mouvement à vitesse constante :

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = \frac{1}{4\pi c^2\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{v}\wedge\widehat{u}$$

$\overrightarrow{B}$ créé par une distribution continue de courant :

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\overrightarrow{j}(P)\wedge\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}d\mathcal{V}$$

$\overrightarrow{B}$ créé par un circuit filiforme (**Loi de Biot Savart**) :

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}I\oint_{\text{circuit}}\frac{\overrightarrow{dl}_P\wedge\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}$$

(**N.B.** μ_0 est la perméabilité du vide
$\mu_0 \equiv 4\pi 10^{-7}$SI (Henry m^{-1}))
Flux magnétique à travers une surface

$$\Phi \equiv \iint_S \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dS}$$

2 Propriétés fondamentales

1. **Flux conservatif :**

Forme intégrale	**Forme différentielle**
$\oiint_S \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dS} = 0$	$\text{div}\,\overrightarrow{B} = 0$

2. **Théorème d'Ampère : la circulation de $\overrightarrow{B}$ sur un contour fermé est égal à μ_0 fois le courant traversant une surface qui s'appuie sur ce contour** :

Forme intégrale	**Forme différentielle**
$\oint_C \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0\iint_S \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{dS} = \mu_0 I_{\text{enl}}$	$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j}$

3 Action magnétique

Sur une particule chargée (**Force de Lorentz**) :

$$\overrightarrow{F} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}\right)$$

Sur un circuit filiforme (**Force de Laplace**) :

$$\overrightarrow{F}_L = \oint_{\text{circuit}} I\overrightarrow{dl}\wedge\overrightarrow{B}$$

Théorème de Maxwell : Quand le champ magnétique est **statique**, le travail fait par la force de Laplace, $\overrightarrow{F}_L\cdot\overrightarrow{dr}$, lors d'un déplacemnt, $\overrightarrow{dr}$, du circuit, est égal au courant dans le circuit fois le changement du flux magnétique traversant le circuit, $d\Phi_c$:

$$\boxed{dW = Id\Phi_c \quad\Rightarrow\quad W = I\Delta\Phi_c}$$

Conséquences du Th. de Maxwell :
Energie potentielle d'interaction magnétique, $\mathcal{U}_m$:

$$\mathcal{U}_m = -I\Phi_c + Cst$$

Force (à partir de l'énergie potentielle)

$$\overrightarrow{F}_L = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{U}_m = I\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi_c$$

Couple (à partir de l'énergie potentielle)

$$\overrightarrow{\Gamma}_L = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{\Gamma}_i\overrightarrow{e}_i \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{\Gamma}_i = I\frac{\partial\Phi_c}{\partial\alpha_i}$$

4 Dipôle magnétique

Définition du moment dipolaire magnétique, $\overrightarrow{m}$:

$$\overrightarrow{m} \equiv \frac{1}{2}\iiint\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{j}\,d\mathcal{V}$$

D'un circuit filiforme dans un plan de surface S :

$$\overrightarrow{m} = IS\widehat{n}$$

Energie d'interaction magnétique :

$$\mathcal{U}_m = -\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$$

Couple magnétique sur un dipôle :

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{m}\wedge\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$$

Force magnétique sur un dipôle :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{B}_{\text{ext}}\right)$$

5 Induction

L'induction s'applique à des circuits en mouvement et/ou des champs magnétiques qui varient dans le temps.

Loi de Faraday : la force électromotrice e dans un circuit est donné par le changement du flux magnétique à travers le circuit :

$$e \equiv \oint_{\text{circuit}} \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{dl}$$

$$= -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{d^2S} - \frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Ceci mène à une loi fondamentale

Forme différentielle	**Forme intégrale**
$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$

Coefficient d'**induction mutuelle**

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

Coefficient d'auto induction

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

Force électromotrice produit dans un solénoïde :

$$e = -L\frac{dI}{dt}$$

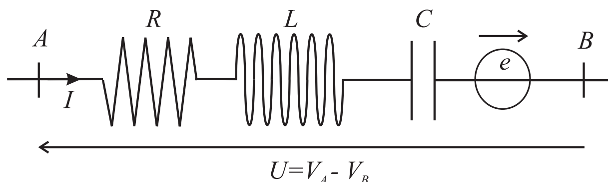
Energie magnétique emmagasinée (champ) :

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0}\iiint \mu_r \left\|\vec{B}\right\|^2 d\mathcal{V}$$

Energie magnétique emmagasinée **dans une bobine :**

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

6 Circuits en régime quasi stationnaires



$$U_{AB} = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} - e$$

Circuit fermé : $U_{AB} = 0$

$$e = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}$$

7 « Potentiel vecteur »

Une conéquence mathématique de la loi div$\vec{B} = 0$, est qu'on peut toujours définir un champ vectoriel $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$. On appel $\vec{A}$ le « potentiel vecteur » même si il n'a pas les propriétés d'un potentiel. De plus est, le champ $\vec{A}$ n'est pas bien définie puisqu'on peut toujours ajouter le gradient d'un champ scalaire f à $\vec{A}$ sans changer sa rotationnelle

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}f$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A}' = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} + \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\text{grad}}f = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$$

Insérant $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$ dans $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$, on obtient une équation différentielle pour $\vec{A}$:

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{A} \equiv \overrightarrow{\text{grad}}\text{ div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j} \quad (1)$$

où nous avons utilisé une autre identité mathématique $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot} \equiv \overrightarrow{\text{grad}}\text{ div} - \Delta$. On peut enlever une partie de la liberté dans la définition de $\vec{A}$ en imposant la contrainte de la «gauge de Coulomb», c.-à.-d. on impose la condition :

$$\text{div}\,\vec{A} = 0$$

Ainsi l'équation (1) dans cette gauge devient

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

et la solution de $\vec{A}$ prend une forme intégrale analogue à celle de V en électrostatique :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}(P)\,d\mathcal{V}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$$

et pour un circuit filiforme

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{\text{circuit}} \frac{\vec{dl}_P}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$$

8 Matériaux magéntiques

Puisque les électrons tounant autour de leurs noyaux ont le comportement de circuits microscopiques, tout milieu matériel à une réponse magéntique non nulle même si celle-ci est généralement très faible (sauf pour les matériaux feromagnétiques). La réponse magéntique des matériaux est caractérisée par un **vecteur de polarisation magnétique**, $\vec{M}$, qui peut être interprété comme une densité volumique de moment dipolaire magnétique telle que le moment

diplolaire $\overrightarrow{d\boldsymbol{m}}$ d'un volume $d\mathcal{V}$ soit donné par $\overrightarrow{d\boldsymbol{m}} = \overrightarrow{\boldsymbol{M}} d\mathcal{V}$.

La densité de courant, $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}_m$, (de nature atomique) associée avec l'existance de $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}$, se trouve avec la relation :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{\boldsymbol{M}} = \overrightarrow{\boldsymbol{j}}_m$$

L'équation d'ampère s'écrit donc

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \left(\overrightarrow{\boldsymbol{j}}_m + \overrightarrow{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{libre}} \right)$$

où $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{libre}}$ correspond à la densité de courant présent dans des circuits.

Puisque nous n'avons pas de contôle direct de $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}_m$, il est pratique en présence de milieux matériels de définir le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}} \equiv \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\mu_0} - \overrightarrow{\boldsymbol{M}} \tag{2}$$

L'équation différentielle de $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ en magnétostatique est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \overrightarrow{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{libre}} \tag{3}$$

Si la symétrie du problème est suffisament élevée, on peut obtenir $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ en faisant appel à la forme intégrale de l'éq.(3) :

$$\oint_C \overrightarrow{\boldsymbol{H}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{l}} = I_{\mathrm{enl}} \tag{4}$$

Très souvent, il y a une relation linéaire entre $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}} = \chi_m \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\mu_0} \tag{5}$$

où χ_m est la **susceptibilité** magnétique du matériau.

Mettant (5) dans (2), on obtient une relation linéaire entre $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ (**relation constitutive**) :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\mu_0} (1 - \chi_m) \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \equiv \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\mu_r \mu_0} \tag{6}$$

où $\mu_r = 1/(1-\chi_m)$ est la perméabilité magnétique relative du matériau.

9 Equations de Maxwell

Maxwell a modifié l'équation $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ afin que les équations d'électromagnétisme soient consistantes avec l'équation de conservation de charge :

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \textbf{conservation de charge}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \mu_0 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \qquad \textbf{équation modifiée}$$

Les équations d'un champ électromagnétique dans le vide sont appelées les ***quatre équations de Maxwell*** :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{div}\, \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \mathrm{div}\, \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0 \\ \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\partial t} & \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \mu_0 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \end{array}}$$

On peut également exprimer ces quatre équations sous ***forme intégrale :***

$$\oiint_S \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot d^2\overrightarrow{\boldsymbol{S}} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\epsilon_0} \quad , \quad \oiint_S \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = 0$$

$$\oint_C \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{l}} = -\iint_S \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{S}}$$

$$\oint_C \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{l}} = \varepsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{S}} + \mu_0 \iint_S \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{S}}$$

10 Equations de Maxwell en milieux matériels :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{div}\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \rho\,, & \mathrm{div}\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0 \\ \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\,, & \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\boldsymbol{D}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \end{array}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{D}} = \epsilon_0 \varepsilon_r \overrightarrow{\boldsymbol{E}}$$

11 Conditions limites à des interfaces

$$\widehat{\boldsymbol{n}}_{12} \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{B}}_1 \right) = 0$$

$$\widehat{\boldsymbol{n}}_{12} \wedge \left(\overrightarrow{\boldsymbol{H}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{H}}_1 \right) = \overrightarrow{\boldsymbol{j}}_s$$

$$\widehat{\boldsymbol{n}}_{12} \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{D}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{D}}_1 \right) = \sigma$$

$$\widehat{\boldsymbol{n}}_{12} \wedge \left(\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1 \right) = \overrightarrow{0}$$